

# 任意の位相空間のStone-Čechコンパクト化とGelfand双対性

任意の位相空間に対するStone-Čechコンパクト化とGelfand双対性の関係は、位相空間論と関数解析（作用素環論）が美しく交差する非常に興味深いテーマです。

結論から申し上げますと、「任意の位相空間  $X$  上の有界連続関数がなす環にGelfand双対性を適用することで、自動的に  $X$  のStone-Čechコンパクト化  $\beta X$  が構成される」という完全な対応関係があります。

局所コンパクトHausdorffや、さらには完全正則（Tychonoff）といった良い性質を仮定しない「全く任意の位相空間」において、このメカニズムがどのように働くのかを順を追って解説します。

## 1. 準備と定義

### 1.1 有界連続関数のなす環 $C_b(X)$

$X$  を任意の位相空間（Hausdorff性などの分離公理は一切仮定しない）とします。 $X$  上の複素数値有界連続関数全体からなる集合を  $C_b(X)$  と定義します。

$$C_b(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ は連続かつ } \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty\}$$

$C_b(X)$  には以下の構造を入れます。

- 和・スカラー倍・積: 各点ごとに定義（例： $(fg)(x) = f(x)g(x)$ ）。
- 対合 (Involution): 複素共役により  $f^*(x) = \overline{f(x)}$  と定義。
- ノルム: 上限ノルム  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ 。

### 1.2 可換単位的 $C^*$ -環とGelfandスペクトル

Banach代数  $A$  が  $C^*$ -環であるとは、対合  $*$  を持ち、任意の  $a \in A$  に対して  $C^*$ -条件  $\|a^*a\| = \|a\|^2$  を満たすことを指します。

$A$  が可換かつ単位元を持つとき、その**Gelfandスペクトル（指標空間）**  $\Sigma$  を次のように定義します。

$$\Sigma = \{ \phi : A \rightarrow \mathbb{C} \mid \phi \text{ は非零な環準同型 (指標)} \}$$

$\Sigma$  には、各  $a \in A$  に対する評価値  $\phi \mapsto \phi(a)$  が連続となるような最弱の位相（弱\*-位相）を入れます。このとき、Banach-Alaogluの定理により、 $\Sigma$  は**コンパクトHausdorff空間**となります。

### 1.3 Stone-Čechコンパクト化の普遍性による定義

任意の位相空間  $X$  に対し、以下の普遍性を満たすコンパクトHausdorff空間  $\beta X$  と連続写像  $\iota : X \rightarrow \beta X$  の組を、**Stone-Čechコンパクト化**と定義します。

任意のコンパクトHausdorff空間  $K$  と任意の連続写像  $g : X \rightarrow K$  が与えられたとき、連続写像  $\hat{g} : \beta X \rightarrow K$  が一意に存在して、 $g = \hat{g} \circ \iota$  を満たす。

## 2. Gelfand双対性の基本（コンパクトHausdorff空間のケース）

まず、Gelfand双対性の最も基本となる定理を確認します。

- 空間から代数へ:** 任意のコンパクトHausdorff空間  $K$  に対し、その上の複素数値連続関数の全体  $C(K)$  は、上限ノルムと各点での演算により、可換な単位的  $C^*$ -環になります。
- 代数から空間へ:** 逆に、任意の可換な単位的  $C^*$ -環  $A$  に対し、その極大イデアル空間（あるいは指標空間、Gelfandスペクトル）  $\Sigma_A$  に弱\*-位相を入れたものは、コンパクトHausdorff空間になります。

Gelfand双対性は、この対応関係が圏論的な反変圏同値（圏の同型）を与えるというものです。つまり、「**コンパクトHausdorff空間の研究**」は「**可換単位的  $C^*$ -環の研究**」と完全に等価になります。

### 3. 任意の位相空間 $X$ への適用

$X$  を任意の位相空間（Hausdorff性も局所コンパクト性も一切仮定しない）とします。

## 1. 代数 $C_b(X)$ の構成:

$X$  上の有界連続関数  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  の全体を  $C_b(X)$  とします。関数が有界であるため、上限ノルム  $\|f\|_\infty$  が定まり、 $C_b(X)$  は完備なノルム空間 (Banach空間) になります。さらに積や対合 (複素共役) も自然に定義でき、 $C_b(X)$  は可換な単位的  $C^*$ -環となります (単位元は定数関数 1)。

## 2. Gelfandスペクトル $\Sigma$ の構成:

$C_b(X)$  は可換単位的  $C^*$ -環であるため、Gelfand双対性を適用して、そのスペクトル (指標空間) を  $\Sigma$  と置きます。

$$\Sigma := \text{Spec}(C_b(X))$$

Gelfandの定理より、 $\Sigma$  は自動的にコンパクトHausdorff空間となります。

# 4. 主張の証明: スペクトル $\Sigma$ が $\beta X$ である理由

この構成で得られたコンパクトHausdorff空間  $\Sigma$  は、実は  $X$  のStone-Ćechコンパクト化  $\beta X$  そのものです。ここから、「 $C_b(X)$  のGelfandスペクトル  $\Sigma$  が  $\beta X$  と同型になること」を自己完結的に証明します。

**定理1:**  $C_b(X)$  は可換単位的  $C^*$ -環である。

### 証明:

上限ノルムによる一様極限が連続性を保つことと、 $\mathbb{C}$  が完備であることから、 $C_b(X)$  はBanach空間です。関数の積が可換であることは明らかであり、定数関数 1 が単位元となります。

$C^*$ -条件については、任意の  $f \in C_b(X)$  に対して以下が成り立ちます。

$$\|f^* f\|_\infty = \sup_{x \in X} |\overline{f(x)} f(x)| = \sup_{x \in X} |f(x)|^2 = \left( \sup_{x \in X} |f(x)| \right)^2 = \|f\|_\infty^2$$

したがって、 $C_b(X)$  は可換単位的  $C^*$ -環です。■

**定理2:** 評価写像  $\iota: X \rightarrow \Sigma$  は連続であり、その像  $\iota(X)$  は  $\Sigma$  で稠密である。

## 証明:

任意の  $x \in X$  に対し、 $\iota(x) : C_b(X) \rightarrow \mathbb{C}$  を  $\iota(x)(f) = f(x)$  と定義します。これは明らかに積を保つ非零な線形汎関数（指標）なので、 $\iota(x) \in \Sigma$  です。

1. **連続性:**  $X$  内のネット  $x_\lambda \rightarrow x$  をとります。任意の  $f \in C_b(X)$  について、 $f$  は連続なので  $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$  となります。すなわち  $\iota(x_\lambda)(f) \rightarrow \iota(x)(f)$  です。これは  $\Sigma$  における弱  $*$ -位相の収束の定義そのものであり、 $\iota$  は連続です。

2. **稠密性:**  $\overline{\iota(X)} \subsetneq \Sigma$  と仮定します。 $\Sigma$  はコンパクトHausdorffなので、Urysohnの補題により、ある非零な連続関数  $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  が存在し、 $\overline{\iota(X)}$  上で恒等的に 0 となります。

Gelfand表現定理（等長同型  $A \cong C(\Sigma)$ ）により、この  $\Phi$  に対応する  $f \in C_b(X)$  が一意に存在し、任意の  $\phi \in \Sigma$  に対して  $\Phi(\phi) = \phi(f)$  を満たします。

$\Phi$  は  $\iota(X)$  上で 0 なので、任意の  $x \in X$  について

$0 = \Phi(\iota(x)) = \iota(x)(f) = f(x)$  となります。これは  $f$  が恒等的に 0 であることを意味し、同型性から  $\Phi = 0$  となり矛盾します。したがって、 $\iota(X)$  は  $\Sigma$  で稠密です。■

**定理3:**  $\Sigma$  は Stone-Čechコンパクト化の普遍性を満たす（すなわち  $\Sigma \cong \beta X$ ）。

## 証明:

$K$  を任意のコンパクトHausdorff空間、 $g : X \rightarrow K$  を任意の連続写像とします。

### 1. 代数準同型の構成:

引き戻し写像  $g^* : C(K) \rightarrow C_b(X)$  を  $g^*(h) = h \circ g$  で定義します。 $h, g$  ともに連続なので  $h \circ g$  は連続であり、 $K$  がコンパクトであるため  $h$  は有界、ゆえに  $h \circ g \in C_b(X)$  です。 $g^*$  は  $C^*$ -環の単位的準同型となります。

### 2. スペクトル間の写像の構成:

$g^*$  の双対写像として、 $\tilde{g} : \Sigma \rightarrow \Sigma_K$  を  $\tilde{g}(\phi) = \phi \circ g^*$  と定義します（ここで  $\Sigma_K$  は  $C(K)$  のGelfandスペクトルです）。指標の合成は再び指標になるため、写像は well-defined であり、弱  $*$ -位相の性質から連続です。

### 3. $K$ への同一視と可換性の確認:

コンパクトHausdorff空間  $K$  に対するGelfand双対性より、同相写像  $\kappa : K \rightarrow \Sigma_K$  ( $\kappa(y)(h) = h(y)$ ) が存在します。目的の写像  $\hat{g} : \Sigma \rightarrow K$  を  $\hat{g} = \kappa^{-1} \circ \tilde{g}$  と定義

します。

任意の  $x \in X$  と  $h \in C(K)$  について、

$$\tilde{g}(\iota(x))(h) = (\iota(x) \circ g^*)(h) = \iota(x)(h \circ g) = h(g(x)) = \kappa(g(x))(h)$$

すなわち  $\tilde{g}(\iota(x)) = \kappa(g(x))$  となります。両辺に  $\kappa^{-1}$  を適用すると、 $\hat{g}(\iota(x)) = g(x)$  となり、 $g = \hat{g} \circ \iota$  が示されました。

#### 4. 一意性:

$\Sigma$  において  $\iota(X)$  は稠密 (定理2) であり、 $\hat{g}$  は連続であるため、稠密部分空間上の値が一致する連続写像は空間全体で一意に定まります。■

## 5. Hausdorff性や完全正則性を仮定しない場合何が起きるか?

一般の位相空間  $X$  に対して連続写像  $\iota: X \rightarrow \beta X$  を構成しましたが、これが「単射」あるいは「埋め込み」になる条件を証明します。

**定理4:**  $\iota: X \rightarrow \beta X$  が単射であるための必要十分条件は、 $C_b(X)$  が  $X$  の点を分離することである。

#### 証明:

任意の  $x, y \in X$  ( $x \neq y$ ) に対して、 $\iota(x) = \iota(y)$  となる条件を考えます。

定義より、 $\iota(x) = \iota(y) \iff$  任意の  $f \in C_b(X)$  について  $\iota(x)(f) = \iota(y)(f) \iff$  任意の  $f \in C_b(X)$  について  $f(x) = f(y)$  です。

したがって、全ての異なる2点に対して  $f(x) \neq f(y)$  となる  $f \in C_b(X)$  が存在する場合 (関数が点を分離する場合) にのみ、 $\iota$  は単射になります。■

#### Tychonoff化 (Tychonoff reflection) への帰結:

- $X$  がTychonoff空間 (完全正則Hausdorff空間) であれば、閉集合と点の分離条件から、 $C_b(X)$  は点を分離し、かつ  $\iota$  は  $X$  の位相を  $\beta X$  の部分空間位相として引き起こすため、中への同相写像 (埋め込み) になります。(これが通常の「コンパクト化」のイメージです)

- $X$  がそうでない場合、 $x \sim y \iff \forall f \in C_b(X), f(x) = f(y)$  という同値関係で  $X$  を割った商空間  $X/\sim$  を経由して  $\beta X$  に埋め込まれることになります。代数的アプローチ (Gelfand 双対性) を用いると、この「関数の目から見て区別できない点を同一視する」という操作が  $C_b(X)$  を経由することで自動的に行われていることが明確に分かります。

## 6. 具体例による理解の深化

代数  $C_b(X)$  の構造が、空間  $\beta X$  の幾何学的な形をどのように決定するのかを、性質の異なる極端な例から順に見ていきましょう。

### 例1: 密着位相空間 (点の同一視と Tychonoff 化)

最も位相が「悪い」空間の例として、2点集合  $X = \{a, b\}$  に密着位相 (開集合が  $\emptyset$  と  $X$  のみ) を入れたものを考えます。

- 代数  $C_b(X)$  の構造:

連続関数  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  を考えます。もし  $f(a) \neq f(b)$  であれば、 $\mathbb{C}$  におけるそれぞれの値の互いに素な近傍を  $X$  に引き戻したとき、 $a$  のみを含む開集合と  $b$  のみを含む開集合ができてしまい、密着位相であることに矛盾します。したがって、連続関数は定数関数しか存在しません。

つまり、 $C_b(X) \cong \mathbb{C}$  (複素数体そのもの、1次元の環) となります。

- スペクトル  $\beta X$  の計算:

環  $\mathbb{C}$  の非零な指標 (準同型  $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ) は、恒等写像  $\phi(z) = z$  のただ1つしかありません。したがって、その Gelfand スペクトルは1点空間になります。

$$\beta X = \{*\}$$

- ここから分かること:

写像  $\iota: X \rightarrow \beta X$  は、 $a$  も  $b$  も同じ1点  $*$  にマッピングします。関数で区別できない点はスペクトル空間において完全に「同一視」され、1点に潰れて Tychonoff 空間 (この場合は自明なコンパクト Hausdorff 空間) に補正されていることがはっきりと分かります。

### 例2: 離散空間 $X = \mathbb{N}$ (巨大なコンパクト化と超フィルター)

次に、位相が「良すぎる（点が完全に分離されている）」ものの、コンパクトには程遠い例として、自然数全体  $\mathbb{N}$  に**離散位相**（全ての部分集合が開集合）を入れた空間を考えます。

- **代数  $C_b(\mathbb{N})$  の構造:**

$\mathbb{N}$  上の関数は単なる「数列」です。連続性の条件は離散位相により常に満たされるため、 $C_b(\mathbb{N})$  は**有界な複素数列の全体  $l^\infty$**  と完全に一致します。

- **スペクトル  $\beta\mathbb{N}$  の計算:**

$l^\infty$  のGelfandスペクトル  $\beta\mathbb{N}$  は非常に巨大な空間になります。

各自然数  $n \in \mathbb{N}$  は、評価写像  $ev_n(f) = f(n)$ （数列の第  $n$  項を取り出す操作）として  $\beta\mathbb{N}$  の孤立点として埋め込まれます。しかし、 $\beta\mathbb{N}$  にはこれら以外にも無数の点が追加されます。

例えば、極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$  が存在する収束数列の部分環を考えると、その極限值を取る操作もひとつの指標になります。一般の有界数列には極限が存在しないため、追加される点は「極限の概念を全ての有界数列に対して無理やり拡張したような仮想的な極限操作」に対応します。これは位相幾何学的に「自由超フィルター（free ultrafilter）」と呼ばれるものと1対1に対応します。

- **ここから分かること:**

$\mathbb{N}$  のStone-Čechコンパクト化  $\beta\mathbb{N}$  は、可算無限個の孤立点と、連続体濃度を超える非可算無限個の「無限遠点（境界）」からなる、想像を絶するほど巨大で複雑なコンパクト空間であることが代数的な視点から導かれます。

### 例3: 半開区間 $X = (0, 1]$ （関数の振動と境界の肥大化）

部分空間としての通常のコンパクト化との違いを見るために、 $X = (0, 1]$ （実数の通常の位相）を考えます。

- **代数  $C_b((0, 1])$  の構造:**

$f(x) = x$  や  $g(x) = \cos(x)$  のようなおとなしい関数だけでなく、 $h(x) = \sin(1/x)$  のような、**0 に近づくにつれて激しく振動する関数**も、 $X$  上で有界かつ連続であるため  $C_b(X)$  の立派な元となります。

- **スペクトル  $\beta(0, 1]$  の計算:**

$X$  を単純に  $[0, 1]$  へと埋め込むと、 $x = 0$  の1点を追加するだけでコンパクトになります。しかし、Stone-Čechコンパクト化では**全ての有界連続関数が境界まで連続に拡張できなければなりません**。

もし  $\beta X$  の  $x \rightarrow 0$  側の境界が1点しかなければ、 $h(x) = \sin(1/x)$  はその点で値

を1つに定められず、連続に拡張できません。そのため、 $\beta X$  は  $h(x)$  の  $[-1, 1]$  の振動を全て受け止められるだけの「無数の点」を 0 側に用意します。

- **ここから分かること:**

$\beta(0, 1]$  は、右端の  $(0, 1]$  部分は通常の区間と同じように見えますが、 $x \rightarrow 0$  の境界には巨大な連続体（アブストラクトな位相空間）がべったりと張り付いたような奇妙な形をしています。代数  $C_b(X)$  が「関数の全ての振る舞い（振動など）を記憶している」からこそ、それを反映した普遍的な空間が復元されるのです。

## まとめ

---

局所コンパクト Hausdorff を仮定しなくても、任意の位相空間  $X$  に対して  $C_b(X)$  という  $C^*$ -環は常に定義できます。これに Gelfand 双対性を適用して得られる極大イデアル空間  $\Sigma$  は、位相の悪い  $X$  を自動的に「行儀の良い空間（Tychonoff 空間）」に均した上でコンパクト化したもの、すなわち  $\beta X$  を与えます。

**代数的な構造（有界連続関数のなす環）を調べるだけで、位相的な普遍構造（Stone-Čech コンパクト化）が副産物として完全に抽出される** というのが、この関係性の最も美しいポイントです。